جامعة البعث | العام الدراسي | الاسم
كلية العلوم | 2017-2018 | الرقم

امتحان مقرر مبادئ الإحصاء والاحتمال للسنة الأولى رياضيات - فصل 2

السؤال الأول (42د):

لدينا المتحول العشوائي الذي قانونه الاحتمالي:

$$f(x,y)=a\left(\frac{y}{1+x^2}\right);(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$$

1) أوجد الثابتة (a) حتى تكون هذه الدالة دالة كثافة!
2) ادرس استقلال المتحولين بطريقتين!
3) ثم أوجد توقع وتشتت كل من المتحولين المفروضين!
4) احسب توقع الجداء، ثم تغاير المتحولين ثم معامل الارتباط!
5) أوجد التوقع من أي مرتبة كانت للمتحول Y.

السؤال الثاني (30د):

ليكن (X) متحول عشوائي قانونه الاحتمالي: $P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x};x=0,1$، والمطلوب:

1) ما اسم هذا التوزيع واحسب توقعه وتشتته!
2) أوجد الدالة المولدة لهذا المتحول!
3) قدر الوسيط (p) على أساس عينة عشوائية حجمها (n)، بطريقتي الاحتمالية العظمى والعزوم
4) ادرس نوعية مقدر الوسيط

السؤال الثالث (28د):

ثلاث شركات لانتاج الأدوية بحيث تغطي حاجة السوق في إحدى البلدان. فإذا كانت الشركة الأولى تغطي 23٪ من حاجة السوق وبنسبة عيب 0.02 والثانية تغطي 34٪ وبنسبة عيب 0.03 والثالثة تغطي 43٪ وبنسبة عيب 0.02. والمطلوب:

1) احسب نسبة العيب
2) اشترى أحد الزبائن علبة دواء، فوجدها معيبة. فما احتمال أن تكون من انتاج الشركة الثانية.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

حمص في 2017/7/6 | د. مصطفى حسن

السؤال الأول (42د) 1) الثابت الأول -5-:

$$\int_0^1\int_0^1 \alpha\left(\frac{y}{1+x^2}\right)dx\,dy=\int_0^1 y\left(\arctan x\right)_0^1 dy=\alpha\frac{\pi}{8}=1\Rightarrow \alpha=\frac{8}{\pi}$$

2) دراسة الاستقلال -10-: بما أن $f(x,y)=\left(\frac{8.y}{\pi}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=h_1(y)h_2(x)$ فهما مستقلان

وبطريقة أخرى: نوجد الكثافتين الهامشيتين:

$$f(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\int_0^1\left(\frac{8y}{\pi}\right)dy=\frac{4}{\pi(1+x^2)}$$

$$f(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\left(\frac{8y}{\pi}\right)\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx=2y$$

ونلاحظ أن: $f(x,y)=(2y)\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{1+x^2}\right)=f(y)f(x)$

3) توقع وتشتت المتحولين -10-:

$$EX=\int_0^1 x.f(x)dx=\int_0^1\frac{4x}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{2}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)_0^1=\frac{\ln 4}{\pi}$$

$$EX^2=\int_0^1 x^2.f(x)dx=\int_0^1\frac{4x^2}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{4}{\pi}-1\Rightarrow VarX=\frac{4}{\pi}-1-\left(\frac{\ln 4}{\pi}\right)^2$$

$$EY=\int_0^1 y.f(y)dx=2\int_0^1 y^2dy=\frac{2}{3};\ EY^2=\int_0^1 y^2.f(y)dx=2\int_0^1 y^3dy=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow VarX=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

4) توقع الجداء والتغاير ومعامل الارتباط -12-:

$$E(X.Y)=\frac{8}{\pi}\int_0^1\int_0^1\left(\frac{x.y^2}{1+x^2}\right)dx\,dy=\frac{4}{3\pi}\ln 2\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=E(X.Y)-EX.EY=0$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{VarX}\ \sqrt{VarY}}=\frac{0}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1-\left(\frac{\ln 4}{\pi}\right)}\left(3\sqrt{2}\right)}=0$$

5) إيجاد التوقع للمتحول Y^n -5-:

$$EY^n=\int_0^1 y^n.f(y)dx=2\int_0^1 y^{n+1}dy=\frac{2y^{n+2}}{n+2}$$



الجواب الثاني (30ن): 1) -6- يدعى هذا التوزيع بتوزيع برنولي

$$EX=\sum_{x=0}^{1} x\,p(X=x)=\sum_{x=0}^{1} x\,p^{x}(1-p)^{1-x}=p,$$

$$EX^{2}=\sum_{x=0}^{1} x^{2}\,p(X=x)=\sum_{x=0}^{1} x^{2}\,p^{x}(1-p)^{1-x}=p(1-p)+p^{2}\Rightarrow Var X=p(1-p)$$

2) الدالة المولدة -4-:

$$U_x(t)=\sum_{x=0}^{1} e^{tx}p(X=x)=\sum_{x=0}^{1} e^{tx}p^{x}(1-p)^{1-x}=(1-p)\sum_{x=0}^{1}(pe^{t})^{x}(1-p)^{-x}=(pe^{t}+1-p)$$

3) تقدير الوسيط بالطريقتين -10-: طريقة الاحتمالية العظمى

$$L=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\Rightarrow \log L=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\log p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\log(1-p)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \log L}{\partial p}\right|_{p=\hat{p}}=0\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\hat{p}}=\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-\hat{p}}\Rightarrow \hat{p}=\overline{X}.$$

طريقة العزوم

$$EX|_{p=\hat{p}}=\overline{X}\Rightarrow \hat{p}=\overline{X}.$$

4) نوعية المقدر -10-: $E\hat{p}=E\overline{X}=E\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p}{n}=\frac{n.p}{n}=p.$ فهو مقدر منصف

$$Var\,\hat{p}=Var\,\overline{X}=Var\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p(1-p)}{n^{2}}=\frac{n\,p(1-p)}{n^{2}}=\frac{p(1-p)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

فالتقدير متسق

الجواب الثالث (28ن): ليكن A_i حدث يدل على أن الناتج من الشركة (i)، B يدل على التلف عشوائيا

$$p(A_1)=0.23,\ p(A_2)=0.34,\ p(A_3)=0.43$$
$$p_{A_1}(B)=0.02,\ p_{A_2}(B)=0.03,\ p_{A_3}(B)=0.02\quad (-8-)$$

1) نسبة التلف -10-: بحسب صيغة الأحداث الشاملة

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P_{A_i}(B)=(0.23)(0.02)+(0.34)(0.03)+(0.43)(0.02)=0.0234.$$

2) إذا كانت العينة تالفة، فما احتمال أن تكون من انتاج الشركة الثانية -8-: بحسب صيغة بايز

$$p_B(A_2)=\frac{p(A_2)p_{A_2}(B)}{\sum_{i=1}^{3}p_{A_i}(B)}=\frac{0.0102}{0.0234}=0.44$$

انتهت الأجوبة